Rapport S/B de quantification (RSB_Q) pour un signal réel de bande B

Ce que l'on peut retenir :

- fréquence d'échantillonnage : $F_e \geq 2B$,
- quantification uniforme : $\mathrm{RSB}_Q \propto 6N + 10\log_{10}(F_e/2B)$ où N désigne le nombre de bits du quantificateur, soit 6 dB/bits et 3 dB par doublement de la fréquence d'échantillonnage,
- amélioration du RSB_Q : par mise en forme du bruit de quantification,
- amélioration du RSB_Q : quantification non uniforme en tenant compte de la distribution de probabilité du signal

Table des matières

1. Echantillonnage

Déterministe

On suppose que $x(t)$ est un signal réel tel que sa TF $X(F) = \int x(t)e^{-2j\pi Ft}dt = 0$ pour $|F| > B$. On note $x_e(n) = x(nT_e)$ et $X_e(f) = \sum_n x_e(n)e^{-2j\pi nf}$.

Si $F_e \geq 2B$, alors le signal peut être reconstruit à partir des échantillons et on a :

$$x(t) = \sum_n x_e(n)h_B(t - kT_e) \tag{1}$$

$$\text{où} \quad h_B(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi F_e t} \leftrightarrows H_B(F) = \frac{1}{F_e}\mathbb{1}_{(-B,B)}(F) \tag{2}$$

Règle de conversion Numérique vers Analogique pour un signal déterministe

Partant de la suite des échantillons (et donc de sa TFtd) ainsi que des valeurs de B et F_e, l'expression du spectre $X(F)$ du signal analogique s'obtient de la façon suivante :

1. on calcule la TFtd de $x_e(n)$,
2. on multiplie l'axe des fréquences par F_e,
3. on limite à la bande $(-B, B)$.

$$\{x_e(n) \rightleftarrows X_e(f)\}, B, F_e \longrightarrow X(F) = \frac{1}{F_e} X_e(F/F_e) \mathbb{1}_{(-B,B)}(F)$$

Aléatoire

On suppose que $x(t)$ est un processus aléatoire stationnaire au second ordre au sens large (SSL) réel, centré. On note $R(\tau) = \mathbb{E}\left[x(t+\tau)x(t)\right]$ sa fonction d'autocovariance. On suppose que $x(t)$ est de bande B cad tel que sa densité spectrale $S(F) = \int R(\tau)e^{-2j\pi F\tau}d\tau = 0$ pour $|F| > B$.

On note $x_e(n) = x(nT_e)$ la suite de ses échantillons. $x_e(n)$ est un processus stationnaire au second ordre. Sa fonction d'autocovariance s'écrit :

$$R_e(n) = \mathbb{E}\left[x_e(k+n)x_e(k)\right] = R(nT_e)$$

et sa densité spectrale

$$S_e(f) = \sum_n R_e(n)e^{-2j\pi nf}$$

Alors si $F_e \geq 2B$, on peut reconstruire le processus $x(t)$ à partir de ses échantillons et on a :

$$x(t) = \sum_n x_e(n) h_B(t - kT_e) \text{ où } h(t) = \frac{\sin(2\pi B t)}{\pi F_e t}$$

où l'égalité est comprise dans le sens d'une convergence en moyenne quadratique.

On en déduit l'expression du spectre du signal reconstruit :

$$S(F) = \frac{1}{F_e} S_e(F/F_e) \mathbb{1}_{(-B,B)}(F) \tag{3}$$

Règle de conversion Numérique vers Analogique pour un signal aléatoire

Partant de la suite des *covariances* des échantillons (et donc de sa TFtd) ainsi que des valeurs de B et F_e, l'expression du spectre du signal analogique s'obtient de la façon suivante :

1. on calcule la TFtd de $R_e(n)$,
2. on multiplie l'axe des fréquences par F_e,
3. on limite à la bande $(-B, B)$.

$$\{R_e(n) \rightleftarrows S_e(f)\}, B, F_e \longrightarrow S(F) = \frac{1}{F_e} S_e(F/F_e) \mathbb{1}_{(-B,B)}(F)$$

2. Quantification uniforme de pas q

Bruit de quantification

Si l'entrée $x_e(n) \in [(k-1/2)q, (k+1/2)q[$ alors la sortie $x_e^Q(n) = kq$.

On peut alors écrire :

$$x_e^Q(n) = x_e(n) + \epsilon_e(n) \tag{4}$$

et que $\epsilon_e(n)$ est appelé le *bruit de quantification*.

Hypothèses

$\epsilon_e(n)$ est un bruit blanc, centré, uniforme sur $(-q/2, q/2)$.

L'hypothèse de répartition uniforme exige qu'il n'y ait pas d'*écrêtage*.

On en déduit alors que :

1. $\mathbb{E}\left[\epsilon_e(n)\right] = 0$,
2. $\mathbb{E}\left[\epsilon_e(k+n)\epsilon_e(k)\right] = \delta_n q^2/12$,
3. $S_{\epsilon_e}(f) = \frac{q^2}{12}$

D'après la formule (1) de reconstruction, on obtient avec les échantillons $x_e^Q(n)$ le signal :

$$\begin{aligned} x^Q(t) &= \sum_n x_e^Q(n) h_B(t - kT_e) \\ &= \underbrace{\sum_n x_e(n) h_B(t - kT_e)}_{x(t)} + \underbrace{\sum_n \epsilon_e(n) h_B(t - kT_e)}_{\epsilon(t)=\text{bruit de quantification}} \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3) et le propriété (3), on déduit que la d.s.p. de $\epsilon(t)$ a pour expression :

$$S_\epsilon(F) = \frac{1}{F_e} \frac{q^2}{12} \mathbb{1}_{(-B,B)}(F)$$

Par conséquent la puissance du bruit de quantification est donnée par :

$$P_Q = \mathbb{E}\left[\epsilon^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} S_\epsilon(F) dF = \frac{2B}{F_e} \frac{q^2}{12} \tag{5}$$

RSB de quantification

On suppose que $x(t)$ est un processus aléatoire, stationnaire au second ordre, centré, de puissance $P_x = \mathbb{E}\left[x^2(t)\right]$. Partant de $x^Q(t) = x(t) + \epsilon(t)$, on définit :

$$\mathrm{RSB}_Q = \frac{\mathbb{E}\left[x^2(t)\right]}{\mathbb{E}\left[\epsilon^2(t)\right]}$$

d'après (5), $\mathbb{E}\left[\epsilon^2(t)\right]$ dépend de q. Pour un nombre de bits N donné, le pas :

$$q = \frac{2A_c}{2^N}$$

dépend, quant à lui, de la valeur crête du quantificateur.

Ecrêtage

Nous avons souligné la nécessité d'absence d'écrêtage. Toutefois en pratique celui-ci ne peut être totalement évité et on adopte de fixer un intervalle de confiance suffisant. Cela revient alors à prendre par exemple :

$$A_c^2 = F^2\, P_x$$

Typiquement dans le cas d'une modélisation gaussienne de $x(t)$, si $F = 3$ alors la probabilité de dépasser A_c est inférieure à 1%.

En portant cette expression dans l'expression de q, puis dans celle du RSB, on obtient :

$$\mathrm{SNR}_Q = \frac{F_e}{2B}\frac{12P_x}{q^2} = 3\frac{F_e}{2B}2^{\,2N}\frac{1}{F^2}$$

Finalement en dB on a :

$$\mathrm{SNR}_Q = 6N + 10\log_{10}(Fe/2B) - 10\log_{10}(F^2/3) \;\; (dB) \tag{6}$$

On retiendra :

- que l'on gagne 6 dB par bit,
- que l'on gagne 3 dB quand on double la fréquence d'échantillonnage à condition que l'hypothèse de blancheur de $\epsilon_e(n)$ soit vérifiée, ce qui n'est pas le cas si F_e est trop grand,
- que, quand on utilise au mieux la dynamique du codeur, une valeur typique de F est comprise entre 3 et 4.

Remarques :

1. Sans quantification, d'après le théorème d'échantillonnage, il ne sert à rien de sur-échantillonner. Toute l'information utile pour reconstruire sans erreur le signal est contenue dans les échantillons prélevés à $F_e = 2B$.
2. La formule (6) a été obtenue en supposant que le bruit de quantification est blanc. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, le gain peut être alors très inférieur. Il en est ainsi lorsque le facteur de sur-échantillonnage devient trop grand car, dans ce cas, l'hypothèse de non-corrélation des erreurs n'est plus vraiment justifiée.
3. Il n'y a aucun sens à interpoler la suite à temps discret *déjà quantifiée* dans l'espoir d'obtenir les échantillons qui auraient été produits lors d'un sur-échantillonnage du signal à temps continu. Les écarts introduits par la procédure de quantification sont définitivement perdus et les échantillons reconstruits sont bruités de la même façon.

Exemple 2..1 (Parole en qualité téléphonique ($300 - 3400$Hz)) *la voix est échantillonnée à* $F_e = 8000Hz$ *et quantifiée sur* 8 *bits. On obtient* 64 *kbits/s, appelé MIC pour Modulation par Impulsions et Codage. Le* $RSB \sim 48dB$.

Exemple 2..2 (stereo-CD qualité ($0 - 22000$Hz)) *la voix est échantillonnée à* $F_e = 44100Hz$ *et quantifiée sur* 16 *bits. En monophonie, on obtient* 705.6 *kbits/s. Le* $RSB \sim 96dB$.

3. Mise en forme du bruit de quantification

Considérons le schéma de la figure 1.

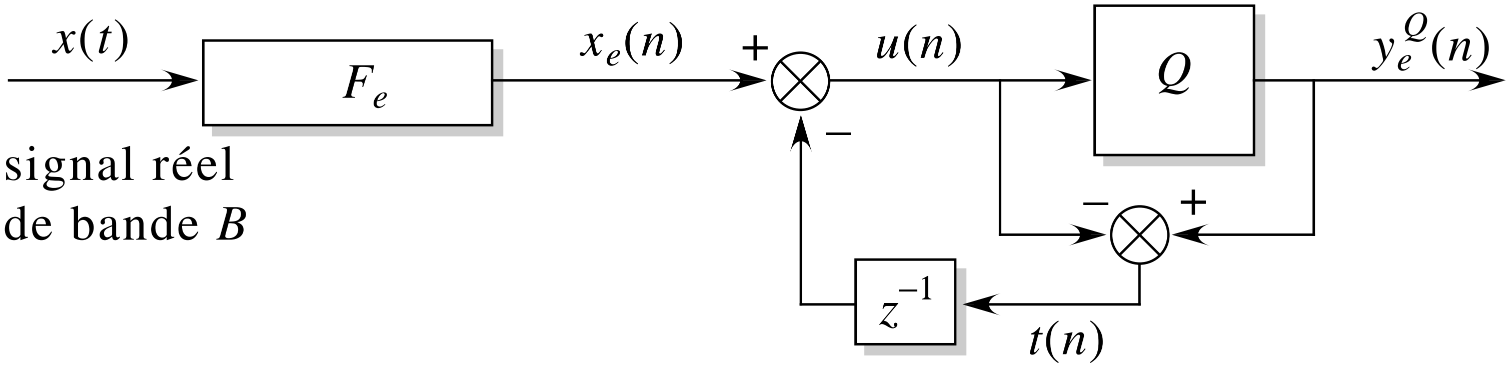


FIG. 1 – *Mise en forme du bruit de quantification*

Le quantificateur Q est équivalent à l'addition d'un bruit $\epsilon_e(n)$ de puissance $q^2/12$. On a :

$$y_e^Q(n) = x_e(n) + \underbrace{\epsilon_e(n) - \epsilon_e(n-1)}_{w_e(n)}$$

où $w_e(n)$ s'obtient par filtrage de gain complexe $G_e(f) = 1 - e^{-2j\pi f}$. Les formules de filtrage donnent :

$$S_{w_e}(f) = S_{\epsilon_e}(f)|G_e(f)|^2 = \frac{q^2}{3}\sin^2(\pi f)$$

D'après (1), On a donc :

$$y^Q(t) \quad = \quad \underbrace{\sum_n x_e(n)h_B(t-kT_e)}_{x(t)} + \underbrace{\sum_n w_e(n)h_B(t-kT_e)}_{w(t)=\text{bruit de quantification}}$$

D'après (3) on a :

$$S_w(F) = \frac{1}{F_e}S_{w_e}(F/F_e)\mathbb{1}_{(-B,B)}(F) = \frac{1}{F_e}\frac{q^2}{3}\sin^2(\pi F/F_e)\mathbb{1}_{(-B,B)}(F) \qquad (7)$$

Par conséquent la puissance du bruit de quantification est :

$$P_Q^{\text{MF}} = \frac{q^2}{3}\int_{-B/F_e}^{B/F_e}\sin^2(\pi f)df = \frac{q^2}{3}\left(\frac{2B}{F_e} - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi B/Fe)\right)$$

Le gain par rapport à la valeur obtenue sans mise en forme du bruit est donné en dB par :

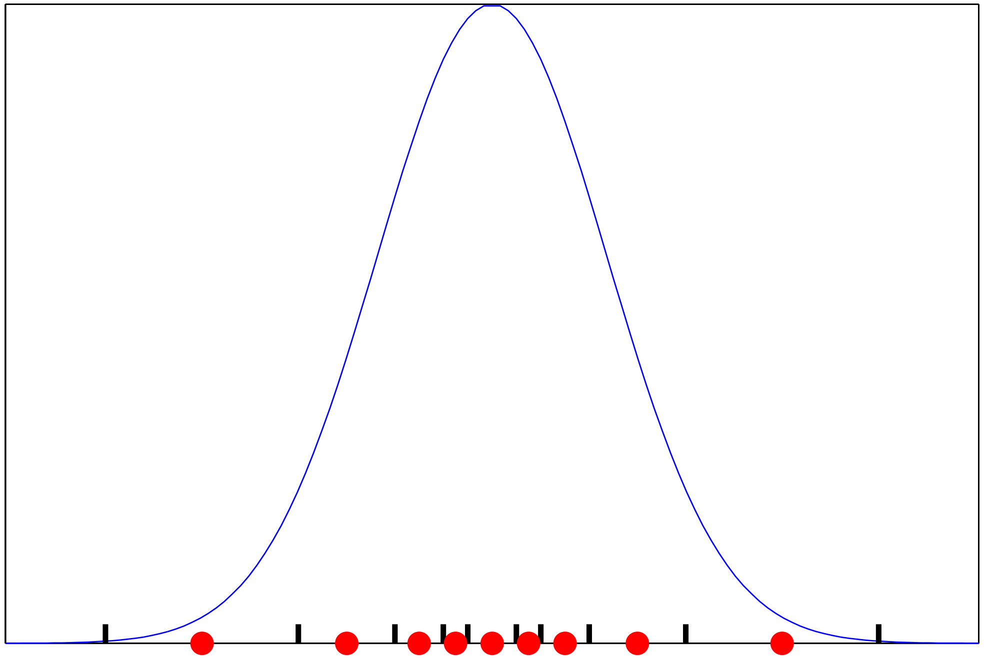
$$\rho = \frac{P_Q^{\mathrm{MF}}}{q^2/12} = 4\tau - \frac{2}{\pi}\sin(\pi\tau)$$

où $\tau = \frac{2B}{F_e}$. Par exemple si $F_e = 4B$, alors :

$$\rho = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0.55, \text{ soit } -2.6\text{dB}$$

4. Quantification non uniforme

Il est clair que l'on peut réduire le bruit de quantification en codant plus précisément les valeurs qui apparaissent plus souvent. De façon imagée, la grille est plus dense là où la densité de probabilité est grande.



Quantification non uniforme $\equiv$ fonction suivie d'une quantification uniforme

$$\{I_k = [\alpha_{k-1}, \alpha_k[\}, \{\mu_k\} : \text{si input } x \in I_k \rightarrow x_Q = \mu_k \tag{8}$$

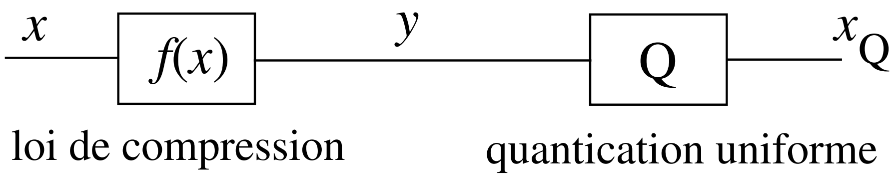
Considérons $\{J_k = [\beta_{k-1}, \beta_k[\}$ avec $\beta_k - \beta_{k-1} = q$ et soit f une fonction quelconque telle que :

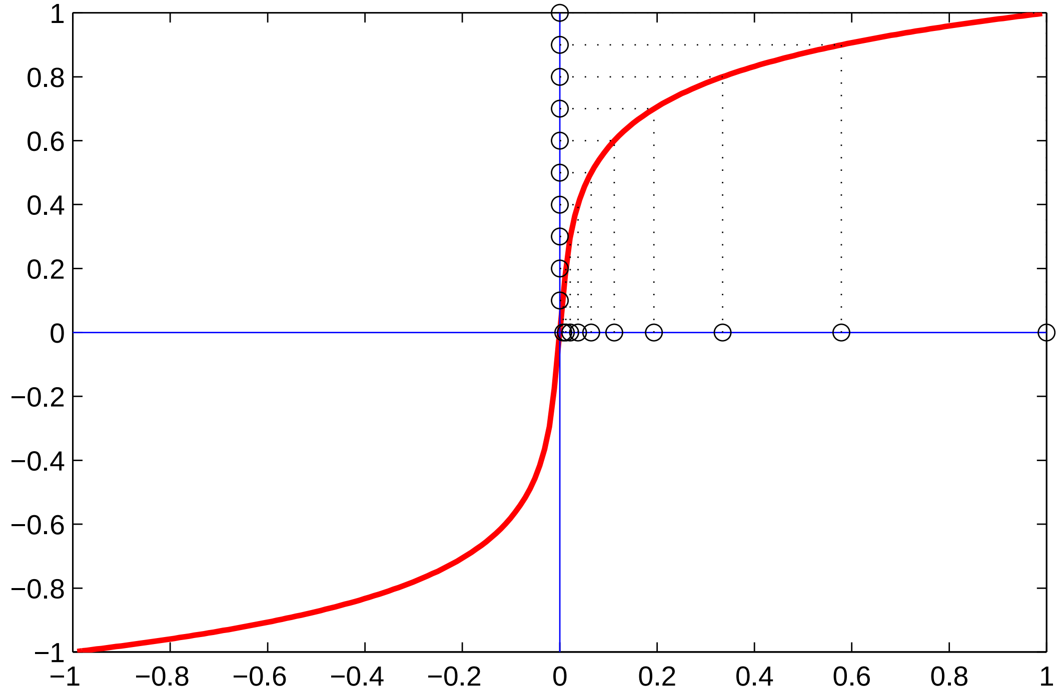
$$f(\beta_k) = \alpha_k \text{ and } f(\nu_k) = \mu_k$$

alors (8) est équivalent à : $x \rightarrow y = f(x) \rightarrow y \in J_k \rightarrow \nu_k \rightarrow x_Q = f^{-1}(\nu_k)$

f est appelée la *loi de compression*.

Loi de compression





Loi LOG - A

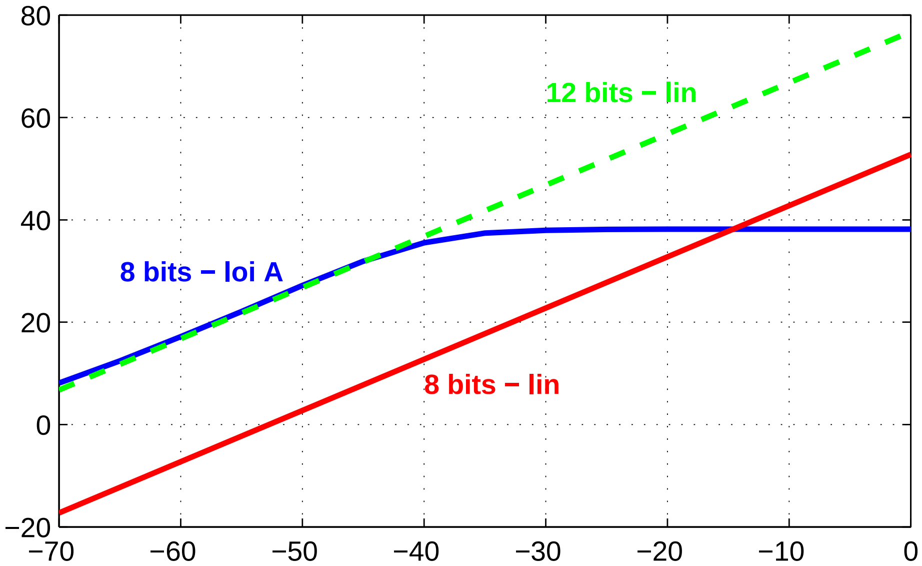


FIG. 2 – *courbe en bleu : RSB en fonction de F^2 (obtenu avec 2s de parole).*

A partir de (6) nous avons (pour $F_e = 2B$) :

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{lin}} = 6N - 10\log_{10}(F^2) + 10\log_{10}(3)$$

où $F^2 = A_c^2/P_x$ (rapport de la puissance crête et de la puissance efficace).